ISSN 1996-3955

МЕЖДУНАРОДНЫЙ ЖУРНАЛ ПРИКЛАДНЫХ И ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

№ 11 2015

УДК 530.145+620.3

ВИХРЕВЫЕ ПОЛЯ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ КВАНТОВЫХ ЧАСТИЦ

Неволин В.К.

НИУ «МИЭТ», Москва, e-mail: vkn@miee.ru

Методами традиционной квантовой механики в представлении плотности вероятности показано, что возможно существование вихревых (торсионных) полей плотности вероятности. Рассмотрены случаи вихревых полей плотности вероятности для низкочастотных фононов, фотонов и «холодных» нейтрино. В случае фотонов проявление вихревых полей можно наблюдать в виде аксиконов. Континуум невзаимодействующих «холодных» нейтрино может создавать макроскопические вихревые поля плотности вероятности.

Ключевые слова: вихревые поля плотности вероятности, низкочастотные фононы, фотоны, «холодные» нейтрино

VORTEX FIELD OF DENSITY FUNCTION PROBABILITY OF THE QUANTUM PARTICLES

Nevolin V.K.

National Research University «MIET», Moscow, e-mail: vkn@miee.ru

Traditional methods of quantum mechanics in the representation of the probability density shows that the possible existence of vortex (torsion) fields of probability density. Considered the cases vortex fields of probability density for low-frequency phonons, photons and «cold» neutrinos. In the case of photons manifestation of vortex fields can be seen in the form of axicons. The continuum of non-interacting «cold» neutrinos can create macroscopic vortex field of probability density.

Keywords: vortex field of the probability of density, low-frequency photons, the photons, «cold» neutrinos

Наша задача – показать, что при вращательном движении квантовой частицы возможно существование и распространение вихревых (торсионных) волн плотности вероятности. Это можно доказать, решая нерелятивисткое уравнение Шредингера в представлении плотности вероятности.

Обычно используется гидродинамическое представление уравнения Шредингера в виде [1-4]:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + div\rho\mathbf{v} = 0. \qquad (1)$$

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{m}\nabla\left[U^{*} + \frac{\hbar^2(\nabla\rho)^2}{8m\rho^2} - \frac{\hbar^2\Delta\rho}{4m\rho}\right], \qquad (2)$$

где $\bar{v}$ – макроскопическая скорость частицы, $\rho(\bar{r},t)$ – плотность вероятности, m – масса частицы, $\hbar$ – постоянная Планка, U^{*} – потенциальная энергия, в которую по необходимости включают электромагнитные составляющие. Возможен учет и спиновых взаимодействий [5]. Эти уравнения неоднократно получались, начиная с Е. Маделунга и Д. Бома [1], путем представления волновых функций в квазиклассическом виде.

Уравнение для плотности вероятности из уравнения Шредингера можно получить и другим путем, если положить [6]:

$$\rho(\bar{r},t) = \Psi\cdot\Psi^{*};$$

$$\rho\mathbf{v} = \frac{i\hbar}{2m}(\Psi\nabla\Psi^{*} - \Psi^{*}\nabla\Psi).$$

Тогда имеем, как и прежде, закон сохранения плотности вероятности (1) и уравнение движения в виде:

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{m}\nabla\left[\frac{m\mathbf{v}^2}{2} + U^{*} + \frac{\hbar^2(\nabla\rho)^2}{8m\rho^2} - \frac{\hbar^2\Delta\rho}{4m\rho}\right]. \quad (3)$$

Это уравнение отличается от уравнения (20). Если положить, что всегда имеет место безвихревое движение поля плотности вероятности, т.е.

$$rot\mathbf{v} = 0,$$

то из уравнения (3) получается уравнение (2).

Таким образом, в гидродинамическом представлении с помощью уравнений (1) и вида (2) отсутствует возможность описания вихревых движений поля плотности вероятности квантовых частиц. Систему уравнений (1), (3) будем называть в отличие от гидродинамического представления представлением плотности вероятности (ранее мы называли его квазигидродинамическим представлением [6]).

Постановка задачи, решение уравнений

Пусть квантовая частица совершает вращательное движение с угловой скоростью ω и радиусом R. Используем цилиндрическую систему координат, тогда орбитальная составляющая скорости $v_\varphi = \omega R$ и пусть частица двигается вдоль оси z с макроскопической скоростью v_z.

Тогда уравнение (1) запишется в виде:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{v_\varphi}{r}\frac{\partial\rho}{\partial\varphi} + v_z\frac{\partial\rho}{\partial z} = 0 . \quad (4)$$

Решение этого уравнения представим таким образом:

$$\rho = \rho(\alpha)$$

$$\alpha = (v_\varphi k_\varphi + v_z k_z)t - k_\varphi r\varphi - k_z z . \quad (5)$$

Первый интеграл уравнения (3), учитывая постоянство скоростей v_ϕ и v_z, запишется в виде:

$$E = \frac{m}{2}(v_\varphi^2 + v_z^2) + \frac{\hbar^2(\nabla\rho)^2}{8\rho^2 m} - \frac{\hbar^2\Delta\rho}{4m\rho} . \quad (6)$$

Обозначим:

$$E - \frac{m}{2}(v_\varphi^2 + v_z^2) = \frac{\hbar^2}{2m}(k_\varphi^2 + k_z^2) . \quad (7)$$

Это можно сделать в силу того, что полная энергия квантовой частицы состоит из макроскопической и квантовой составляющей энергий [6]. Аддитивность составляющих полной энергии можно видеть и в правой части уравнений (3) и (6).

Уравнения (6) с учетом (7) и (5) будем иметь вид:

$$4(k_z^2 + k_\varphi^2) = (k_z^2 + k_\varphi^2 + \varphi^2 k_\varphi^2)\times$$

$$\times\left[\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{d\rho}{d\alpha}\right)^2 - \frac{2}{\rho}\frac{d^2\rho}{d\alpha^2}\right] + \frac{\varphi k_\varphi}{r}\frac{2}{\rho}\frac{d\rho}{d\alpha} . \quad (8)$$

Нам необходимо найти волновое решение этого уравнения. Будем решать его методом последовательных приближений. Положим, что $\varphi << 1$ во всех коэффициентах, входящих в уравнение. Тогда получится уравнение:

$$4 = \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{d\rho}{d\alpha}\right)^2 - \frac{2}{\rho}\frac{d^2\rho}{d\alpha^2} . \quad (9)$$

Решение этого уравнения найдено в [6] и имеет вид:

$$\rho = \rho_0 \cos^2\alpha \quad (10)$$

Это решение справедливо при любом значении α, в том числе и φ. Подставляя решение (10) в (8), получаем алгебраическое трансцендентное уравнение:

$$k_\varphi r\varphi = \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\left[(v_\varphi k_\varphi + v_z k_z)t - \varphi k_\varphi r - z k_z\right] \quad (11)$$

Формулы (10) и (11) описывают решения дифференциальных уравнений (4) и (8).

Обсуждение результатов

Перепишем решение (10) в другом виде:

$$\rho = \rho_0 \cos^2(\omega t - \phi k_\phi r - k_z z) . \quad (12)$$

Здесь ω – частота осцилляций волны плотности вероятности. Имеем линейный закон дисперсии:

$$\omega = v_\phi k_\phi + v_z k_z = \mathbf{vk} . \quad (13)$$

Вектор макроскопической скорости и волновой вектор не совпадают по направлению. Частота осцилляций волны является суммой осцилляций орбитального и поступательного движений. Решение (12) должно удовлетворять условию периодичности в любой момент времени и в любой точке z. Тогда

$$k_\phi r_n = n ,\ n = 1,2.3.... \quad (14)$$

Орбитальный радиус поля плотности вероятности квантуется с равноудаленными расстояниями между окружностями:

$$r_n = \frac{n}{k_\varphi} \quad \delta r_n = \delta r_{n+1} - \delta r_n = \frac{1}{k_\varphi} . \quad (15)$$

С учетом (15) уравнение (11) запишется в виде:

$$n\varphi = \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\left[\omega t - \varphi n - z k_z\right] . \quad (16)$$

Уравнение (16) обеспечивает синхронизацию угловой переменной с текущим временем в каждой точке на оси z. Найдем из уравнения (16) угловую скорость вращения поля плотности вероятности φ.

$$\omega_n = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\omega}{n(1+\cos^2(\omega t - \varphi n - z k_z))} = \frac{\omega\rho_0}{n(\rho_0 + \rho)} . \quad (17)$$

Орбитальная скорость вращения поля плотности вероятности равна:

$$v = \omega_n r_n = \frac{\omega\rho_0}{k_\varphi(\rho_0 + \rho)} . \quad (18)$$

Можно видеть, что орбитальная скорость вращения поля вероятности в любой точке осциллирует в пределах от ω / k_φ до $0,5\omega / k_\varphi$.

Квантовое уравнение в виде (8) не зависит от массы частицы. Стало быть, это уравнение может описывать и движение безмассовых квантовых частиц, имеющих линейный закон дисперсии, в частности, длинноволновых фононов, фотонов и др. частиц. Благо, что в нерелятивистких уравнениях не имеют значения величины скорости для безмассовых частиц. В частности, в [6] было показано, что плотность вероятности и плотность потока вероятности с точностью до обозначений описывают плотность электромагнитной энергии для плоских электромагнитных волн в вакууме и вектор Умова – Пойтинга. В этом можно убедиться, используя формулы (12) и (13). Нужно положить v_φ и φ равными нулю и $v_z = c$, где c – скорость света. Для квантовомеханического описания движения безмассовых частиц (или частиц с исчезающее малой массой покоя) используются квантовый импульс и макроскопическая скорость. Однако континуум таких невзаимодействующих частиц, например, фотонов, описывает различные электромагнитные волны в зависимости от величины волнового вектора или длины волны.

Использование скорости света для безмассовызх частиц в нерелятивисткой квантовой механике не приводит к противоречиям. Скорость света присутствует и в классических уравнениях Максвелла, определяя скорость распространения электромагнитных волн в вакууме. Можно предположить, что уравнение (8) может описывать квантовые свойства пучков света, в частности, аксиконов [7,8], поскольку излучение в виде концентрических окружностей (15) во фронтальной плоскости напоминает обыкновенные аксиконы.

Для вихревого движения плотности поля вероятности частиц с массой покоя отличной от нуля необходимо выполнение условий:

$$v_\varphi, v_z << c,$$

где c – скорость света. Составляющие волнового вектора можно определять следующим образом:

$$k_\varphi = \frac{\sqrt{2m\delta\varepsilon_\varphi}}{\hbar},\ k_z = \frac{\sqrt{2m\delta\varepsilon_z}}{\hbar}, \quad (19)$$

где $\delta\varepsilon_\varphi$, $\delta\varepsilon_z$ – квантовые составляющие энергии орбитального и поступательного движения. Эти энергии отличаются от полных энергий согласно [6] и могут быть измерены отдельным способом [9]. Для оценок воспользуемся тем обстоятельством, что в традиционной квантовой механике полная энергия свободных квантовых частиц отождествляется с её квантовой величиной, что завышает значения волновых векторов. Положим:

$$k_{\varphi 0} = \frac{mv_\varphi}{\hbar} > k_\varphi;\ k_{z0} = \frac{mv_z}{\hbar} > k_z. \quad (20)$$

Например, если иметь дело с «холодными» нейтрино, масса покоя которых оценивается как 10^{-33}г [10], то величина $k_{\varphi 0} = 2\pi / \lambda_{\varphi 0}$, где $\lambda_{\varphi 0}$ – длина волны, при скоростях частиц $v_\varphi \sim 10^9$ см/с $\lambda_\varphi > 6 \cdot 10^{-3}$ см. Эта оценка показывает, что континуум невзаимодействующих «холодных» нейтрино может создавать, в том числе, макроскопические вихревые (торсионные) поля плотности вероятности.

Заключение

Система квантовых уравнений движения с физическими переменными (1), (3), на наш взгляд, более адекватно отражает исходное уравнение Шредингера, чем система уравнений (1), (2), поскольку позволяет описывать вихревые поля плотности вероятности квантовых частиц. В нерелятивистском приближении для частиц с линейным законом дисперсии таких как: низкочастотные фононы, фотоны, «холодные» нейтрино возможны вихревые (торсионные) поля плотности вероятности. Существование вихревых полей оптических фотонов в виде аксиконов это реальность [7,8].

Список литературы

1. Ghosh S.K., Deb B.M. Densities, Density-Functional and Electron Fluids // Physics Reports (Review Section of Physics Letters). – 1982. V. 92, N1. – P. 1-44.

2. Алексеев Б.В., Абакумов А.И. Об одном подходе к решению уравнения Шредингера // Доклады Академии наук – 1982. Т.262. – С.1100-1102.

3. Кузелев М.В. Рухадзе А.А. О квантовом описании линейных кинетических свойств бесстолкновительной плазмы. УФН, 1999,т.169, №6. С.687-689.

4. Кузелев М.В.. Рухадзе А.А. Нерелятивисткая квантовая теория вынужденных черенковского излучения и комптоновского рассеяния в плазме // ФНТ,. – 2011. – Т.37, №9/10. – С.1-7.

5. Микаэлян М.А. Гидродинамическая формулировка уравнений Паули. Прикладная физика. – 2003. – №3. – С.5-9

6. Неволин В.К. Квантовый транспорт в устройствах электроники. – М.: Техносфера, 2012. – 87 с.

7. Волостников В.Г. Спиральные пучки света. http:/www.fian.smr.ru/beam1.htm.

8. 8. Скиданов Р.В., Ганчевская С.В. Формирование пучков Бесселя вихревыми аксиконами. Компьютерная оптика. – 2014.; Т.38. – №3. – С.463-468.

9. Неволин В.К. Патент РФ. Способ измерения энергии квантовой нелокальности частиц, совершающих инфинитное движение. №2444711 с приоритетом от 30.01.2009 г. Бюл.№7, 2012.

10. Лобашов В.М. Измерение массы нейтрино в бета-распаде трития. Вестник РАН. 2003. – №73(1). – С.14-27.